Fonction définie par une intégrale

I. Continuité sous le signe $\int$

A désigne une partie de $\mathbb{R}^m$.

1°) Continuité par domination

Théorème :

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$.

Si

1) $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A pour tout $t \in I$,

2) $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in A$,

3) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Déf : L'hypothèse $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable indépendante de x est appelée hypothèse de domination.

2°) Continuité par domination sur tout compact

Théorème :

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$.

Si

1) $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A pour tout $t \in I$,

2) $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in A$,

3) pour tout compact $K \subset A$, il existe $\varphi_K : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$\forall (x,t) \in K \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

3°) Intégration sur segment

Théorème

Soit $f : A \times [a,b] \to \mathbb{K}$.

Si f est continue alors $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

II. Dérivation sous le signe $\int$

A désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

1°) Formule de Leibniz

Théorème :

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I de sorte que $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ soit définie sur A.

Si f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant :

1) $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue pour tout $t \in I$,

2) $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux pour tout $x \in A$,

3) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$\forall (x,t)\in A\times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq \varphi(t)$

alors la fonction $g:x\mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $g'(x)=\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Cor : La conclusion du théorème demeure en remplaçant 3) par :

3bis) $\forall [\alpha,\beta]\subset A$, $\exists \varphi_{\alpha,\beta}:I\to\mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall (x,t)\in[\alpha,\beta]\times I, \left|f(x,t)\right|\leq \varphi_{\alpha,\beta}(t)$.

(domination sur tout segment de A).

2°) Dérivées d'ordre supérieure

Théorème :

Soit $f:A\times I\to\mathbb{K}$ telle que $\forall x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I de sorte que $g:x\mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie sur A .

Si f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ldots,\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ vérifiant pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$:

1) $x\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur A pour tout $t\in I$,

2) $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x\in A$,

3) $\exists \varphi_k:I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t)\in A\times I$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq \varphi_k(t)$

Alors la fonction $g:x\mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur A et pour tout $k\in\{0,\ldots,n\}$:

$g^{(k)}(x)=\int_I \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$.

Cor : La conclusion du théorème demeure en remplaçant 3) par :

3bis) $\forall [\alpha,\beta]\subset A$, $\exists \varphi_{k,\alpha,\beta}:I\to\mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall (x,t)\in[\alpha,\beta]\times I, \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq \varphi_{k,\alpha,\beta}(t)$.

(domination sur tout segment).

3°) Intégration sur segment

Théorème :

Soit $f:A\times[a,b]\to\mathbb{K}$ admettant des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ldots,\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$.

On suppose que pour tout $x\in A$, l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ldots,\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sont continues alors $g:x\mapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k\in\{0,\ldots,n\}$,

$g^{(k)}(x)=\int_a^b \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$.

III. Etude de la fonction gamma d'Euler

1°) Définition

Déf : On pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Prop : $\forall x>0, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$.

Prop : $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

2°) Continuité et dérivabilité

Théorème :

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.